Ю. В. Иванов

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Глазов
2012

УДК 531.0
ББК 22.311
И20

Р е ц е н з е н т ы :
В. А. Саранин, доктор физико-математических наук,
профессор (г. Глазов)
А. В. Проказов, кандидат физико-математических наук,
доцент (г. Глазов)

Иванов Ю. В.
И20 Краткий курс математической физики: Учебное пособие / Ю.В. Иванов. – Глазов: ООО «Глазовская типография», 2012. – 48 с.

ISBN

В пособии приведён краткий обзор основных разделов математической физики. Предназначено для студентов физико-математических специальностей педагогических вузов.

ISBN
УДК 531.0
ББК 22.311

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предмет и задачи математической физики. Прямая и обратная проблема

Математическая физика — это наука о математических моделях физических явлений.

Математическая модель — описание явления системой математических уравнений.

Процесс научного познания строится по циклу *факты* → *модель* → *следствия* → *эксперимент*, в котором можно выделить следующие этапы (рис.1): 1) Изучаемый объект или явление. 2) Физическая модель. 3) Математическая модель. 4) Математическая задача. 5) Решение математической задачи. 6) Интерпретация решения математической задачи в терминах физической модели. 7) Верификация решения математической задачи средствами физического эксперимента.

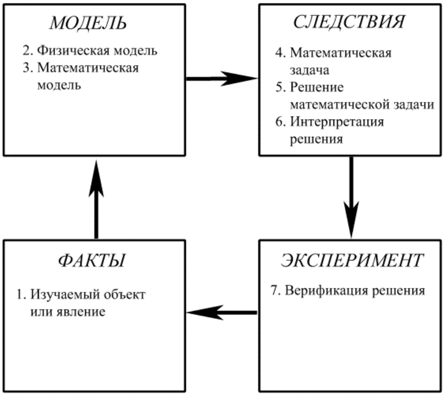


Рис.1. Этапы научного познания

Из этой схемы можно определить место математической физики в цикле научного познания и область её задач.

Математическое поле — область пространства, каждой точке которого соответствует определённое значение некоторой математической величины.

В зависимости от того какая величина распределена в пространстве, можно выделить скалярные, векторные и тензорные математические поля. Если математическое поле образует физическая величина, то принято говорить о математическом поле физической величины. Например, можно описать распределение температуры в некотором объёме математическим полем температуры.

Основная задача математической физики — аналитическое исследование математических полей.

В связи с решением основной задачи математической физики выделяют две проблемы.

Прямая проблема. Пусть задано математическое поле. Требуется определить свойства и основные характеристики этого поля. Решением прямой проблемы занимается *математическая теория поля*.

Обратная проблема состоит в нахождении конкретного вида поля, если известны условия, в которых находится объект или протекает физическое явление. Решением обратной проблемы занимается *теория дифференциальных уравнений в частных производных*.

Основные этапы развития математической физики

В самостоятельную науку математическая физика выделилась в конце XVIII – начале XIX века. Именно в этот период в трудах учёных впервые появляется словосочетание «математическая физика».

В сущности основы математической физики были заложены ещё в работах Г. Галилея, И. Кеплера и Р. Декарта. Позднее методы математической физики, как теории математических моделей физики, начали интенсивно разрабатываться в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница по созданию основ классической механики, что потребовало создания нового математического аппарата — теории интегрального и дифференциального исчисления.

Дальнейшее развитие методов математической физики связано с изучением колебаний, явлений акустики и гидродинамики. Этот период связывают с именами таких учёных как Ж. Даламбер, Ж. Лагранж, Л. Эйлер, П. Лаплас, К. Гаусс.

В XIX – начале XX вв. развитие математической физики связано с решением задач теплопроводности, диффузии, теории упругости, теории потенциала, электродинамики и др. В этот период развития математической физики широкое распространение получают математические модели, основанные на вероятностно-статистическом подходе к описанию явлений. Большой вклад в развитие математической физики на этом этапе внесли Ж. Фурье, Б. Риман, М.В. Остроградский, С.В. Ковалевская, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, С. Пуассон, Л. Больцман, О. Коши. П. Дирихле, Дж.К. Максвелл, А. Пуанкаре.

В XX веке возникают новые задачи газовой динамики, физики плазмы теории относительности и квантовой механики, что приводит к появлению математических моделей, основанных на теории операторов, обобщённых функциях и функциях комплексного переменного. Развитие методов математической физики на этого этапе связывают с трудами Д. Гильберта, П. Дирака, А. Эйнштейна, Э. Шрёдингера, Р. Фейнмана, Дж. фон Неймана, В. Гейзенберга.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

2.1. Скалярное поле. Поверхности уровня. Производная по направлению. Градиент

Если в пространстве или любой части пространства каждой точке M сопоставлено значение скалярной величины $u(M)$, то говорят, что задано **скалярное поле** $u = u(M)$.

Примеры скалярных полей физических величин: поле плотности, поле давления, поле электростатического потенциала, поле температуры нагретого тела и т. д.

В общем случае скалярное поле представляет собой функцию трёх пространственных координат и времени $u = u(x, y, z, t)$. В случае, когда поле $u = u(M)$ не зависит от времени t, скалярное поле называют *стационарным* (устоявшимся). Для простоты рассуждений при изучении основ математической теории поля будем рассматривать только стационарные поля.

Скалярные поля могут быть изображены геометрически с помощью *поверхностей уровня*.

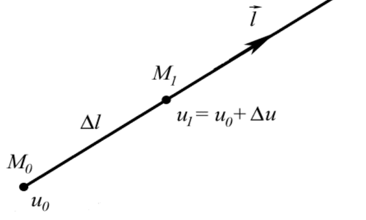
Поверхностью уровня скалярного поля $u = u(M)$ называется множество точек пространства, в которых скалярная функция $u(M)$ имеет некоторое постоянное значение.

Уравнение поверхности уровня имеет вид: $u(x, y, z) = C$, где $C = const$. В случае двумерного поля $u = u(x, y)$ поверхности уровня вырождаются в *линии уровня*.

Примерами поверхностей уровня являются, в частности, эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда, в поле температуры — изотермы ($T = const$), в поле давлений — изобары ($p = const$).

Пусть в некоторой области пространства задано скалярное поле $u = u(M)$. Для количественной характеристики быстроты изменения поля в окрестностях произвольной точки поля M_0 вводят понятие *производной по направлению*.

Рис.2



Пусть скалярное поле $u = u(M)$ имеет в точке M_0 зачение $u(M_0) =$

u_0 (рис.2), а в точке M_1, находящейся на расстоянии Δl от M_0 в направлении $\vec{l}$ — значение $u_1 = u_0 + \Delta u$.

Производной скалярного поля $\boldsymbol{u = u(M)}$ в точке $\boldsymbol{M_0}$ по направлению $\vec{\boldsymbol{l}}$ называется предел отношения приращения скалярного поля Δu при смещении на Δl вдоль $\vec{l}$ к величине этого смещения, когда последнее стремится к нулю.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(M_1) - u(M_0)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}. \qquad (2.1.1)$$

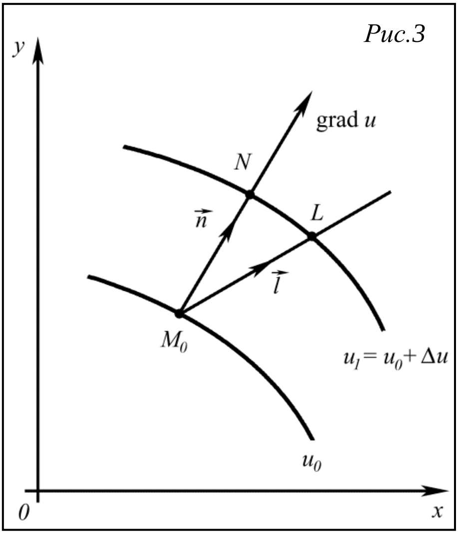


Рис.3

В отличие от обычной производной значение производной по направлению зависит от выбора направления. Найдём алгоритм, позволяющий найти производную по направлению в точке, если заданы скалярное поле и некоторое направление.

Проведём через M_0 линию уровня, соответствующую значению $u_0 = u(M_0)$. Построим также линию уровня, соответствующую большему значению поля $u = u_0 + \Delta u$ (рис.3). Найдём производные по направлению нормали к линии уровня $\vec{n}$, и произвольному направлению $\vec{l}$ ($\vec{n}$ и $\vec{l}$ — единичные).

По определению производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lim_{M_0 N \to 0} \frac{u(N) - u(M_0)}{M_0 N} = \lim_{M_0 N \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l};$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{M_0 L \to 0} \frac{u(L) - u(M_0)}{M_0 L} = \lim_{M_0 L \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Из анализа рисунка и условий, что $M_0 N \to 0$ и $M_0 L \to 0$, видно, что $M_0 N = M_0 L \cdot \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{l}}\right)$. Учитывая это, можно показать, что:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial n} \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{l}}\right). \qquad (2.1.2)$$

Из анализа выражения (2.1.2) следует, что в любой точке поля производная по нормали к линии уровня больше производной по любому другому направлению. Таким образом, можно считать, что направление нормали определяет направление наибыстрейшего возрастания поля. Это направление выделяют особо, и связывают с ним понятие *градиента скалярного поля.*

Градиентом скалярного поля $\boldsymbol{u = u(M)}$ в точке $\boldsymbol{M_0}$ называются вектор, направленный в сторону наибыстрейшего возрастания скалярного поля, модуль которого равен производной скалярного поля по этому направлению:

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial n}\vec{n}. \tag{2.1.3}$$

С учётом (2.1.3) и определения скалярного произведения векторов формула (2.1.2) перепишите в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial n} n \cdot l \cdot \cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{l}}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\vec{n}\right)\cdot \vec{l} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{l} = \\ = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{l}}\right) = \operatorname{grad}_l u.\end{gathered} \tag{2.1.4}$$

Из выражения (2.1.4) следует, что производная по произвольному направлению любому направлению $\vec{l}$ равна проекции модуля градиента на это направление.

Найдём координаты градиента в декартовой системе координат. По формуле (2.1.4): $\operatorname{grad}_x u = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\operatorname{grad}_y u = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\operatorname{grad}_z u = \frac{\partial u}{\partial z}$. Следовательно, в декартовой системе координат:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{2.1.5}$$

Модуль градиента скалярного поля рассчитывается по формуле:

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Координаты l_x, l_y, l_z единичного вектора $\vec{l}$ в декартовой системе координат (рис.3) могут быть определены как $l_x = \cos\alpha$, $l_y = \cos\beta$, $l_z = \cos\gamma$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — *направляющие косинусы направления* $\vec{l}$.

Как уже было показано в выражении (2.1.4): $\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{l}$. Тогда, учитывая свойства скалярного произведения векторов, *производная по направлению* может быть найдена следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2.1.6)$$

Операторы Гамильтона и Лапласа

Оператор Гамильтона (оператор набла) — векторный дифференциальный оператор первого порядка вида:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

С учётом этого, градиент скалярного поля может быть записан как $\mathrm{grad}\, u = \nabla u$.

Свойства градиента:

1. $\nabla(C_1 u + C_2 v) = C_1 \nabla u + C_2 \nabla v$;
2. $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$;
3. $\nabla(C) = 0, C = const$;
4. $\nabla f(u) = f'(u)\, \nabla u$.

Оператор Лапласа (лапласиан) — скалярный дифференциальный оператор второго порядка вида:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Операторы Лапласа и Гамильтона связаны между собой соотношением: $\Delta = \nabla(\nabla) = \nabla^2$.

2.2. Векторное поле. Векторная функция. Векторные линии

Векторная функция скалярного аргумента

Если каждому значению скалярного параметра t отвечает определённый вектор $\vec{a}(t)$, то вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ называется **векторной функцией скалярного аргумента** t. В декартовой системе координат векторная функция записывается в виде: $\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$.

Для графического представления зависимости $\vec{a} = \vec{a}(t)$ используют понятие *годографа векторной функции.*

Годографом векторной функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ называется линия, которую описывает конец вектора $\vec{a}(t)$ при изменении t в случае, когда начало $\vec{a}(t)$ помещено в фиксированную точку — **полюс годографа**.

Примером векторной функции является радиус–вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В этом случае полюсом годографа является начало координат $O(0,0,0)$, годографом радиус–вектора является траектория движения материальной точки.

Производная векторной функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ по скалярному аргументу t определяется аналогично производной скалярной функции:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}.$$

Производная векторной функции лежит на касательной к годографу векторной функции. В частности, вектор мгновенной скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ лежит на касательной к траектории движения тела.

Векторное поле

Если в некоторой области пространства каждой точке M сопоставлен определённый вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что задано **векторное поле** $\vec{a} = \vec{a}(M)$.

В декартовой системе координат векторное поле задаётся векторной функцией $\vec{a}(M) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$, где $a_x(x,y,z)$, $a_y(x,y,z)$, $a_z(x,y,z)$ — скалярные поля. Задание одного векторного поля равносильно заданию совокупности трёх скалярных полей.

Если компоненты векторного поля a_x, a_y, $a_z = const$, то поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называют *однородным*.

Примерами векторных полей физических величин являются поле силы тяжести, поле напряжённости точечного заряда, поле индукции магнитного поля постоянного тока и т.д.

Векторной линией векторного поля называется кривая, в каждой точке которой вектор направлен по касательной к этой кривой.

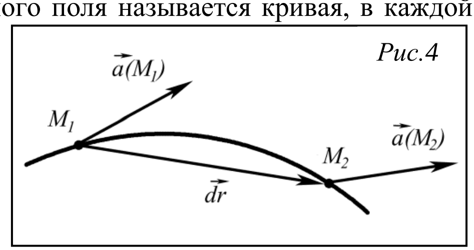


Рис.4

Если $|d\vec{r}| \to 0$, то $M_2 \to M_1$, следовательно $\vec{a} \parallel \overrightarrow{dr}$ (рис.4). По свойству векторного произведения $\overrightarrow{dr} \times \vec{a} = 0$. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=0;$$

$$\vec{i}\left(a_z dy - a_y dz\right) + \vec{j}(a_x dz - a_z dx) + \vec{k}\left(a_y dx - a_x dy\right) = 0;$$

$$\begin{cases} a_z dy - a_y dz = 0 \\ a_x dz - a_z dx = 0 \\ a_y dx - a_x dy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{a_y} = \dfrac{dz}{a_z} \\ \dfrac{dz}{a_z} = \dfrac{dx}{a_x} \\ \dfrac{dx}{a_x} = \dfrac{dy}{a_y} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Решение полученной системы дифференциальных уравнений представляет собой уравнение векторных линий векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$.

Производная векторного поля по направлению

Производная векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ по направлению $\vec{l}$ определяется аналогично производной по направлению скалярного поля:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\vec{a}(M_1) - \vec{a}(M_0)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta l}.$$

В декартовой системе координат производная векторного поля по направлению находится как $\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = \left(\vec{l_0}\nabla\right)\vec{a}$, где $\vec{l_0}$ — единичный вектор направления $\vec{l}$.

2.3. Дифференциальные характеристики скалярного и векторного полей

Будем искать величины, однозначно характеризующие быстроту изменения поля в каждой его точке.

Случай скалярного поля

Пусть задано скалярное поле $u = u(x, y)$. Если для дифференциальной характеристики скалярного поля использовать совокупность частных производных $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ по взаимно перпендикулярным направлениям x и y, то окажется, что такая характеристика будет зависеть от выбора системы координат. Следовательно, пара значений частных производных по взаимно перпендикулярным направлениям не является инвариантной дифференциальной характеристикой скалярного поля.

Инвариантной дифференциальной характеристикой скалярного поля является поле его градиентов $\operatorname{grad} u$. Действительно, вектор $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial n}\vec{n}$ не зависит от выбора системы координат, его модуль

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \text{ inv.}$$

Случай векторного поля

Пусть задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(x, y)$. Ему можно сопоставить два скалярных поля $a_x(x, y)$ и $a_y(x, y)$. Также как и в случае скалярного поля можно показать, что величины ∇a_x и ∇a_y не являются инвариантной дифференциальной характеристикой векторного поля $\vec{a}$, так как зависят от выбора системы координат.

Инвариантной дифференциальной характеристикой векторного поля является его *тензор–производная:*

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_x}{\partial x} & \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} & \dfrac{\partial a_y}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что как в случае скалярного поля величины $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ являются компонентами инвариантной дифференциальной характеристики $\operatorname{grad} u$, так и в случае векторного поля величины ∇a_x и ∇a_y являются компонентами инвариантной дифференциальной характеристики — тензор–производной.

2.4. Элементы тензорного исчисления

Тензором второго ранга в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется величина, характеризуемая в трёхмерном пространстве девятью числами p_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$\widehat{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

преобразующихся при переходе в базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ по формуле:

$$p_{ij}' = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \alpha_{im}\, \alpha_{jn}\, p_{ij},$$

где (α_{ks}) — матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$. Компоненты матрицы перехода находятся как $\alpha_{ks} = \cos(\vec{e}_k \hat{,} \vec{e}_s')$, $k, s = 1, 2, 3$.

Тензор p-го ранга в трёхмерном пространстве представляет собой совокупность 3^p компонент. В n–мерном пространстве тензор второго ранга описывается совокупностью n^2 скалярных величин. В n–мерном пространстве тензор p–го ранга характеризуется n^p компонентами. Таким образом, можно считать, что вектор — это тензор первого ранга, а скаляр — тензор нулевого ранга.

Тензор, заданный в n–мерном пространстве, имеет n инвариантов, состоящих из его компонентов. В частности, в любом базисе постоянными остаются определитель матрицы и сумма элементов её главной диагонали.

Тензор инерции

В физике понятие момента инерции тела относительно некоторой оси определяется как величина равная сумме произведений масс всех его точек на квадрат расстояния от них до этой оси:

$$I = \sum_{k=1}^{N} m_k {r_k}^2.$$

Для каждого тела существует бесконечное множество значений момента инерции. Инвариант, характеризующий инертные свойства тел, представляет собой тензор второго ранга — *тензор инерции:*

$$\hat{I} = \sum_{k=1}^{N} m_k \hat{R}_k\,,$$

где тензор $\hat{R}_k$ определяется как

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

В частности, тензор инерции сплошного диска радиуса R и массой m относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно диску и совпадающей с координатной осью Oz, может быть записан как

$$\hat{I} = \frac{mR^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скалярный и векторный инварианты тензор–производной векторного поля

Как уже было сказано ранее, инвариантной дифференциальной характеристикой векторного поля $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ является тензор вида:

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Выделим в этом тензоре два инварианта, имеющих важное значение для физических приложений.

Дивергенцией векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется скалярная функция

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla\vec{a}.$$

Ротором векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется векторная функция

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}.$$

Свойства дивергенции:

1) $\operatorname{div}\vec{c} = 0$, если $\vec{c} = const$;

2) $\operatorname{div}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$;

3) $\operatorname{div}(u\vec{a}) = \nabla(u\vec{a}) = u(\nabla\vec{a}) + \vec{a}\nabla u = u\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{grad}u$.

Свойства ротора:

1) $\operatorname{rot}\vec{c} = 0$, если $\vec{c} = const$;

2) $\operatorname{rot}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}$;

3) $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = \nabla \times (u\vec{a}) = u(\nabla \times \vec{a}) + \nabla u \times \vec{a}$.

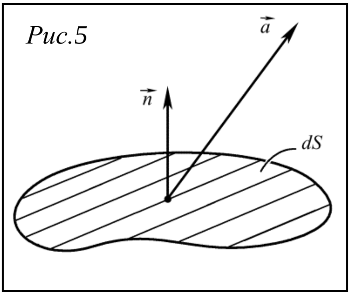
Если $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = 0$, то поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называют **безвихревым** или **потенциальным.** Для такого поля справедливо $\vec{a}(M) = -\operatorname{grad} u(M)$, где $u(M)$ — **потенциал** векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$.

Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$, то поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется **вихревым** или **соленоидальным**.

Дифференциальные характеристики векторного поля могут быть однозначно описаны, если одновременно известны дивергенция и ротор этого поля.

2.5. Поток векторного поля. Теорема Остроградского–Гаусса

Пусть задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$. Выберем в этом поле малую площадку dS такую, что во всех её точках поле можно считать постоянным (рис.5).



Потоком векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ *через площадку* dS называется величина $d\Phi = \vec{a}\overrightarrow{dS}$, где $\overrightarrow{dS} = \vec{n}dS$, $\vec{n}$ — нормаль к dS.

Поток векторного поля через поверхность S может быть найден как $\Phi = \iint d\Phi$. Тогда **потоком векторного поля** называется величина

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{a}\,\overrightarrow{dS}.$$

Если поверхность S замкнута и ограничивает некоторый объем V, то поток векторного поля может быть найден по **теореме Остроградского–Гаусса:**

$$\oiint\limits_S \vec{a}\,\overrightarrow{dS} = \iiint\limits_{V(S)} \operatorname{div}\vec{a}\,dV.$$

2.6. Циркуляция векторного поля. Теорема Стокса

Пусть в поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ задана некоторая замкнутая линия L, и выбрано положительное направление её обхода (рис.6). Разобьём L на участки $\overrightarrow{dl}$.

Циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ вдоль линии L называется величина

$$\Gamma = \oint_L \vec{a}\,\overrightarrow{dl}.$$

Если замкнутая кривая L ограничивает поверхность S, то величина циркуляции может быть найдена по *теореме Стокса.*

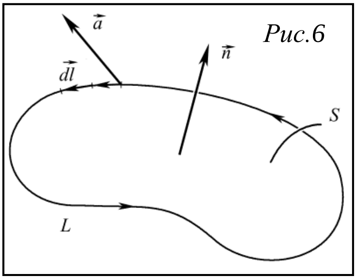


Рис.6

Теорема Стокса: циркуляция векторного поля по замкнутому контуру L равна потоку ротора этого вектора через поверхность S, опирающуюся на контур L.

$$\oint_L \vec{a}\,\overrightarrow{dl} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\;\overrightarrow{dS}.$$

2.7. Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение скалярному полю.
2. Приведите примеры скалярных математических полей физических величин.
3. С помощью какого приёма визуализируется скалярное поле?
4. Запишите уравнение поверхности уровня скалярного поля.
5. Что такое производная по направлению?
6. Что называют градиентом скалярного поля?
7. По какой формуле рассчитывается градиент скалярного поля в декартовой системе координат?
8. Какой вид имеет оператор набла в декартовой системе координат?
9. Какой вид имеет лапласиан в декартовой системе координат?
10. Что такое векторная функция скалярного аргумента?
11. Приведите примеры использования векторных функций в физике.
12. Что называют годографом векторной функции? Для чего используется это понятие?
13. Что является годографом радиус-вектора материальной точки?
14. Что такое векторное поле?
15. Дайте определение векторной линии векторного поля.

16. Каким образом можно найти уравнение векторных линий?
17. Назовите инвариантные дифференциальные характеристики скалярных и векторных полей.
18. Что такое тензор?
19. Сколько компонент содержит тензор p-го ранга в n-мерном пространстве?
20. Дайте определение тензора инерции.
21. Что такое ротор векторного поля?
22. Что такое дивергенция векторного поля?
23. Какое поле называют соленоидальным?
24. Какое поле называют потенциальным?
25. Что такое поток векторного поля? С какой целью вводится это понятие?
26. Сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса. В каких случаях её можно применять?
27. Дайте определение циркуляции векторного поля.
28. Сформулируйте теорему Стокса. В каких случаях её можно применять?

3. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1. Дифференциальные уравнения в частных производных

Дифференциальное уравнение в частных производных — уравнение, связывающее искомую функцию, независимые переменные и частные производные искомой функции по этим независимым переменным.

Порядком дифференциального уравнения с частным производным называется порядок старшей частной производной, входящей в уравнение.

Дифференциальное уравнение в частных производных называют **линейным**, если оно линейно относительно искомой функции и всех её частных производных.

Для физических приложений особый интерес представляют линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Решением (интегралом) дифференциального уравнения в частных производных называется функция, которая, будучи подставленной в дифференциальное уравнение вместо искомой функции, обращает его в тождество.

Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения в частных производных представляет собой совокупность всех функций, удовлетворяющих условию решения дифференциального уравнения.

Для того, чтобы из бесконечного множества решений дифференциальных уравнений выделить частное решение, описывающее реальный физический процесс, необходимо присоединить к дифференциальному уравнению дополнительные условия — начальные и граничные.

Начальные условия задают значения искомой функции и (или) её первой производной в начальный момент времени ($t = 0$).

Граничные (краевые) условия задают значения искомой функции и (или) её первой производной на границах области поиска решения.

3.2. Типы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

В общем случае линейное дифференциальное уравнение в частных производных функции $u = u(x, y)$ имеет вид:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \qquad (3.2.1)$$

где A, B, C, D, E, F, G — известные непрерывные функции от x и y (в частном случае — постоянные коэффициенты).

Если $G = 0$, уравнение (3.2.1) называют однородным, при $G \neq 0$ — неоднородным.

Назовём величину $\Delta = B^2 - AC$ дискриминантом уравнения (3.2.1).

Если в заданной области:

1) $\Delta > 0$, то уравнение (3.2.1) относится к уравнениям **гиперболического** типа;

2) $\Delta = 0$, то уравнение (3.2.1) относится к уравнениям **параболического** типа;

3) $\Delta < 0$, то уравнение (3.2.1) относится к уравнениям **эллиптического** типа.

На сегодняшний день все известные физические задачи сводятся к решению уравнений указанных трёх типов. Для каждого из типов дифференциальных уравнений разработаны определённые методы их решения, известны характерные свойства соответствующих решений.

Примеры уравнений математической физики

1. *Уравнения гиперболического типа.*

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — уравнение колебаний струны (одномерное волновое уравнение);

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ — уравнение колебаний мембраны;

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$ — общее волновое уравнение.

Уравнения гиперболического типа описывают периодические процессы.

2. *Уравнения параболического типа.*

а) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — одномерное уравнение теплопроводности (u — температура);

б) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — одномерное уравнение диффузии (u — концентрация вещества);

в) $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z,t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ — общее (временнóе) уравнение Шрёдингера.

Уравнения параболического типа, преимущественно, описывают необратимые процессы.

3. *Уравнения эллиптического типа.*

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ — уравнение Лапласа ($\Delta u = 0$);

б) $\Delta u = f$ — уравнение Пуассона;

в) $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0$ — стационарное уравнение Шрёдингера.

Уравнения эллиптического типа описывают стационарные процессы.

3.3. Вывод уравнения колебаний струны

Будем понимать под струной однородную гибкую упругую нить с постоянной линейной плотностью. Пусть струна, длиной l натянута и закреплена в точках $x = 0$ и $x = l$ (рис.7). Если струну отклонить от её первоначального положения и отпустить, то она будет совершать поперечные колебания возле положения равновесия.

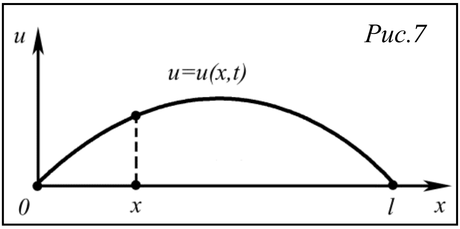


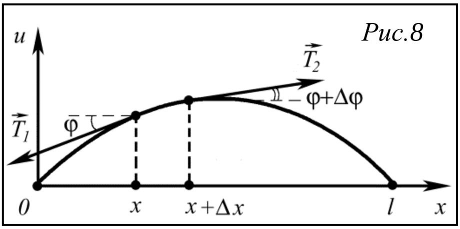
Рис.7

Будем рассматривать малые отклонения точек струны. Можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси Ox в одной плоскости. При этом процесс колебаний описывается функцией $u = u(x,t)$, определяющей отклонение точки с координатой x в момент времени t. Функция $u = u(x,t)$ определяет положение струны в любой момент времени (профиль струны).

Малость отклонения точек струны понимается в следующем смысле.

1) Угол между касательной к произвольной точке и осью Ox мал настолько, что его синус примерно равен его тангенсу: $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$.

2) Изменение силы упругости, возникающее вследствие дополнительной деформации, мало по сравнению с силой натяжения струны в положении равновесия. Иными словами будем считать силу натяжения струны в процессе колебаний постоянной.



Рассмотрим малый участок струны $(x,\ x+\Delta x)$, массой $\Delta m = \rho\Delta x$, ρ — линейная плотность (рис.8). Длина рассматриваемого участка струны примерно равна Δx в силу малости отклонения.

Равнодействующая сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, действующих на участок Δm, сообщает ему ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Тогда из второго закона Ньютона:

$$T_2 \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T_1 \sin\varphi = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

С учётом малости отклонений заменим в уравнении $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi$, $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi)$. Учтём также, что в силу однородности струны $T_1 = T_2 = T$. Из геометрического смысла производной следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$; $\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$.

Отсюда,

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \rho\,\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

По теореме Лагранжа о среднем значении:

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

С учётом этого,

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x = \rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Сократив на Δx, и поделив обе части уравнения на ρ получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обозначим $\sqrt{\frac{T}{\rho}} = a$. Тогда уравнение колебаний струны примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где a — скорость распространения упругой волны по струне.

3.4. Вывод уравнения теплопроводности

Пусть на оси Ox лежит однородный стержень, теплоизолированный от внешней среды (рис.9). Если в начальный момент времени с увеличением x температура уменьшалась, то с течением времени будет происходить процесс теплопередачи в положительном направлении оси Ox.

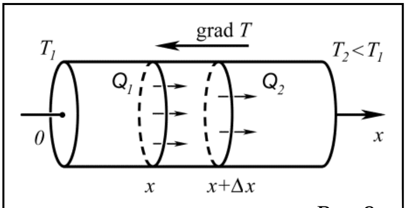


Рис.9

Будем описывать этот процесс функцией $u = u(x, t)$, определяющей температуру в сечении стержня с координатой x в момент времени t.

Определим физический смысл её первых частных производных по координате x и времени t:

$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=\text{const}}$ — быстрота изменения температуры в данном сечении;

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=\text{const}}$ — значение градиента температуры в данный момент времени.

Выберем в стержне произвольно два сечения с координатами x и $x + \Delta x$. Количество теплоты, проходящее через сечение стержня с координатой x, определяется эмпирическим законом Фурье для теплопроводности:

$$Q_1(x) = -\kappa\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} S\,\Delta t,$$

где κ — коэффициент теплопроводности, S — площадь сечения стержня, Δt — время. Количество теплоты, проходящее через сечение стержня с координатой $x + \Delta x$:

$$Q_2(x+\Delta x) = -\kappa\,\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\,S\,\Delta t.$$

За одно и тоже время Δt на участок стержня Δx входит тепла Q_1, выходит Q_2. Их разность ΔQ идёт на повышение температуры участка стрежня:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = \kappa\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] S\Delta t;$$

$$\Delta Q = \kappa\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\,S\Delta t.$$

Будем считать участок стержня Δx столь малым, что в каждый момент времени температура в каждом его сечении одинакова. Тогда за время Δt, температура в каждой точке участка Δx увеличится на $\Delta T = u(x,\ t+\Delta t) - u(x,t)$.

Количество теплоты, необходимое для этого:

$$\Delta Q = c\Delta m\Delta \mathrm{T} = c\rho\,\Delta x\,S\,[u(x,t+\Delta t) - u(x,t)].$$

С учётом теоремы о среднем, получим:

$$\Delta Q = c\rho\,\Delta x\,S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t.$$

По закону сохранения энергии:

$$c\rho\,\Delta x\,S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\,S\Delta t;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $\frac{\kappa}{c\rho}$ — *коэффициент температуропроводности*.

Для унификации записи уравнений обозначим $\frac{\kappa}{c\rho} = a^2$. Тогда, одномерное уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3.5. Классификация задач математической физики. Постановка задач математической физики, условие корректности

Как отмечалось ранее, для однозначного решения дифференциального уравнения в частных производных необходимо присоединить к нему дополнительные условия — *начальные* и *граничные*. В зависимости от того, какие из условий могут быть заданы, задачи математической физики делятся на три типа: *задача Коши, смешанная задача и краевая задача*.

1. Задача Коши. Если процесс протекает в бесконечном интервале (бесконечная струна, бесконечный стержень), то краевые условия не задаются и задача сводится к *задаче только с начальными условиями — задаче Коши.*

2. Смешанная задача. Если рассматривается задача для конечного промежутка, то должны быть заданы и начальные и граничные условия. Это, так называемая, *смешанная задача*.

Рассмотрим на примере смешанной задачи о колебаниях закреплённой струны способы задания начальных и граничных условий.

Пусть струна длиной l натянута и закреплена на концах. Начальная форма струны описывается функцией $y = f(x)$, начальная скорость точек струны задаётся функцией $v = F(x)$.

Граничные условия. Колебания струны описываются функцией $u = u(x,t)$. Считая, что концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$, граничные условия будут заданы следующим образом: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

Начальные условия. Начальная форма струны будет задана как $u(x,0) = f(x)$, начальная скорость точек струны: $u'_t(x,0) = F(x)$.

3. Краевая задача. К краевым сводятся задачи, описывающие стационарные процессы. В этом случае время t в уравнение не входит, соответственно начальные условия не задаются, и в задаче ставят только граничные (краевые) условия, то есть указывают поведение искомой функции на границе области. Если задаётся поведение самой искомой функции, то такую задачу называют *задачей Дирихле*, если задаётся значение первой производной искомой функции — *задачей Неймана*.

Определение начальных и граничных условий должно быть таким, чтобы малые изменения данных задачи вызывали лишь малые изменения в её решении. В этом случае говорят, что **решение устойчиво относительно исходных данных.**

Задача математической физики считается поставленной **корректно**, если решение, удовлетворяющее всем её условиям, существует **единственно** и **устойчиво**.

3.6. Вопросы для самопроверки

1. Что называют дифференциальным уравнением с частными производными?
2. Какое дифференциальное уравнение в частных производных называется линейным?
3. Приведите пример линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка
4. Что такое интеграл дифференциального уравнения в частных производных?
5. Что называют общим решением дифференциального уравнения с частными производными?
6. По какому признаку классифицируются дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка?

7. Запишите уравнение колебаний струны. К какому типу уравнений оно относится?
8. Запишите одномерное уравнение теплопроводности. К какому типу уравнений оно относится?
9. Запишите уравнение Лапласа. К какому типу уравнений оно относится?
10. Каким общим признаком характеризуются физические процессы, описываемые дифференциальными уравнениями гиперболического типа.
11. Каким общим признаком характеризуются физические процессы, описываемые дифференциальными уравнениями параболического типа?
12. Каким общим признаком характеризуются физические процессы, описываемые дифференциальными уравнениями эллиптического типа?
13. На основании какого общего закона природы выводится уравнение теплопроводности?
14. Что задают начальные условия?
15. Что задают граничные условия?
16. Для чего необходима постановка начальных и граничных условий?
17. Какая задача называется задачей Коши?
18. Какие условия должны быть заданы в задаче Коши?
19. Какой физический смысл имеет условие, заданное для задачи Коши о свободных колебаниях струны: $u(x,0) = f(x)$?
20. Какая задача называется смешанной?
21. В какой задаче задаются только краевые условия?
22. Приведите примеры задания начальных и граничных условий.
23. В каком случае можно считать решение задачи устойчивым относительно исходных данных?
24. В каком случае считается, что задача математической физики поставлена корректно?

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

4.1. Решение задачи Коши о свободных колебаниях струны методом Даламбера

Пусть струна является настолько протяжённой, что за интересующее нас время колебание, вызванное отклонением точек некоторого среднего участка струны, не успевает достигнуть её концов. В этом случае граничные условия можно не учитывать. Это задача Коши о бесконечной струне.

Решение задачи сводится к решению уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.1.1}$$

при начальных условиях:

$$\begin{gathered} u(x,0) = f(x), \\ u'_t(x,0) = F(x). \end{gathered} \tag{4.1.2}$$

Метод Даламбера — это метод бегущих волн. Будем искать решение в виде:

$$u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \tag{4.1.3}$$

где φ и ψ — любые дважды дифференцируемые функции от x и t. Решение в виде (4.1.3) означает, что реальная форма струны в каждый момент времени может быть представлена суперпозицией волн, бегущих навстречу друг другу с одинаковой скоростью a.

Проверим, что (4.1.3) является решением уравнения (4.1.1). Для этого найдём частные производные функции (4.1.3) по x и t:

$$\begin{gathered} u'_x(x,t) = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at); \\ u''_{x^2}(x,t) = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at); \\ u'_t(x,t) = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at); \\ u''_{t^2}(x,t) = a^2[\varphi''(x - at) + \psi''(x + at)]. \end{gathered}$$

Заменяя в последней производной выражение, стоящее в квадратных скобках, на значение второй производной по координате u''_{x^2}, получим: $u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}$.

Подставляя последнее выражение в уравнение (4.1.1), получим верное тождество. Это означает, что функция вида (4.1.3) удовлетворяет условию решения уравнения колебаний струны (4.1.1). Решение уравнения (4.1.1) в виде (4.1.3) называют *решением Даламбера.*

Определим функции φ и ψ из начальных условий. В начальный момент времени $t = 0$:

$$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) \equiv f(x);$$
$$u_t'(x,0) = -a\varphi'(x) + a\psi'(x) \equiv F(x).$$

Таким образом, для нахождения φ и ψ необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x). \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Для упрощения второго уравнения системы найдём от его правой и левой частей интеграл с переменным верхним пределом:

$$\int_0^x (-a\varphi'(x) + a\psi'(x))dx = \int_0^x F(x)dx\,;$$

$$-a\varphi(x)|_0^x + a\psi(x)|_0^x = \int_0^x F(x)\,dx.$$

Поделив обе части на a, и подставив верхний и нижний пределы в левой части, получим:

$$-\varphi(x) + \varphi(0) + \psi(x) - \psi(0) = \frac{1}{a}\int_0^x F(x)\,dx;$$

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x F(x)\,dx + \big(-\varphi(0) + \psi(0)\big).$$

Обозначим $C = -\varphi(0) + \psi(0)$. Тогда:

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x F(x)\,dx + C.$$

Таким образом, система (4.1.4) приобретает вид:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ -\varphi(x) + \psi(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x F(x)\,dx + C. \end{cases}$$

Поочерёдно складывая и вычитая уравнения, выразим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x F(x)\,dx - \frac{C}{2};$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x F(x)\,dx + \frac{C}{2}.$$

Заменим в полученных значениях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ аргумент x соответственно на $(x - at)$ и $(x + at)$. Получим:

$$\varphi(x-at) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at} F(x)\,dx - \frac{C}{2};$$

$$\psi(x+at) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} F(x)\,dx + \frac{C}{2}.$$

Подставим полученные значения в решение Даламбера (4.1.3), и, после упрощения выражения, получим *формулу Даламбера:*

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx. \qquad (4.1.5)$$

Полученная формула (4.1.5) является решением уравнения колебаний струны (4.1.1), полностью удовлетворяющим начальным условиям (4.1.2).

4.2. Решение смешанной задачи о колебаниях конечной струны с закреплёнными концами методом Фурье

Рассмотрим задачу в свободных колебаниях струны, закреплённой на обоих концах. Она сводится к решению уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (4.2.1)$$

при граничных условиях

$$\begin{gathered} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0, \end{gathered} \qquad (4.2.2)$$

и начальных условиях

$$u(x,0) = f(x),$$
$$u'_t(x,0) = F(x). \qquad (4.2.3)$$

Это смешанная задача о колебаниях закреплённой струны. Будем решать её *методом Фурье.*

Метод Фурье — метод разделения переменных. Его суть сводится к тому, что искомую функцию, зависящую от нескольких переменных, представляют в виде произведения нескольких функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. В нашем случае функцию $u = u(x,t)$ представляют в виде произведения двух функций: $X(x)$, зависящей только от координаты x, и $T(t)$, зависящей только от ни t:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t). \qquad (4.2.4)$$

Выясним, при каких условиях уравнение колебаний струны (4.2.1) разрешимо в виде (4.2.4). Для этого подставим (4.2.4) в уравнение (4.2.1). Учитывая, что $u''_{x^2} = X''(x)\,T(t)$ и $u''_{t^2} = X(x)\,T''(t)$, получим:

$$X(x)\,T''(t) = a^2X''(x)T(t).$$

В полученном выражении разделим правую и левую части на $a^2X(x)T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Анализируя полученное выражение можно прийти к выводу, что его левая часть точно не зависит от x, а правая — не зависит от t. Следовательно, отношения $\frac{T''(t)}{a^2T(t)}$ и $\frac{X''(x)}{X(x)}$ не зависит ни от x ни от t. Это возможно лишь в том случае, если эти отношения равны одной и той же постоянной величине. Обозначим её как $-\lambda^2$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \qquad (4.2.5)$$

где λ — параметр разделения. Таким образом, мы приходим к выводу, что уравнение колебаний струны (4.2.1) разрешимо в виде (4.2.4) в том случае, если выполняется условие (4.2.5).

Условие (4.2.5) позволяет разделить дифференциальное уравнение в частных производных (4.2.1) на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} T'' + \lambda^2a^2T = 0, \\ X'' + \lambda^2X = 0. \end{cases}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений получим решение этих уравнений в виде:

$$\begin{cases} T(t) = A\cos(\lambda a t) + B\sin(\lambda a t), \\ X(x) = C\cos(\lambda x) + D\sin(\lambda x), \end{cases}$$

где $A,\ B,\ C, D$ — некоторые неизвестные постоянные интегрирования.

Подставим полученные решения в выражение (4.2.4):

$$u(x,t) = [A\cos(\lambda a t) + B\sin(\lambda a t)]\,[C\cos(\lambda x) + D\sin(\lambda x)].$$

Таким образом, дальнейшее решение уравнения колебаний струны методом Фурье сводится к нахождению значений $A,\ B,\ C,\ D$ и λ, удовлетворяющих начальным и граничным условиям.

Учтём граничные условия (4.2.2):

$$u(0,t) = T(t)[C\cos(\lambda\cdot 0) + D\sin(\lambda\cdot 0)] \equiv 0 \ \Rightarrow C = 0;$$

$$u(l,t) = T(t)[D\sin(\lambda\cdot l)] \equiv 0 \ \Rightarrow D\sin(\lambda l) = 0 \ \Rightarrow \ \sin(\lambda l) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Полученное значение $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ называют *собственным значением для данной краевой задачи,* а соответствующие им функции $X_n(x) = D_n\sin(\lambda_n x)$ — *собственными функциями.*

С учётом полученных значений, частное решение уравнения колебаний струны (4.2.1), удовлетворяющее граничным условиям примет вид:

$$u_n(x,t) = [A\cos(\lambda_n a t) + B\sin(\lambda_n a t)]D_n\sin(\lambda_n x).$$

Обозначим: $a_n = AD_n$ и $b_n = BD_n$. Тогда:

$$u_n(x,t) = [a_n\cos(\lambda_n a t) + b_n\sin(\lambda_n a t)]\sin(\lambda_n x).$$

Так как уравнение (4.2.1) однородное и линейное, то сумма его решений также является его решением:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t).$$

Отсюда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(\lambda_n a t) + b_n\sin(\lambda_n a t)]\sin(\lambda_n x). \qquad (4.2.6)$$

Подберём числа a_n и b_n так, чтобы решение (4.2.6) удовлетворяло начальным условиям (4.2.3).

Из условия, что $u(x,0) = f(x)$, следует, что:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x) \equiv f(x),$$

что представляет собой разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам, где коэффициент a_n рассчитывается как:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\lambda_n x)dx. \qquad (4.2.7)$$

Из условия, что $u'_t(x,0)=F(x)$, следует, что:

$$u'_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\lambda_n a \sin(\lambda_n x) \equiv\ F(x),$$

что представляет собой разложение функции $F(x)$ в ряд Фурье по синусам, где коэффициент b_n рассчитывается как:

$$b_n=\frac{2}{\lambda_n a l}\int_0^l F(x)\sin(\lambda_n x)dx. \qquad (4.2.8)$$

Таким образом, решение уравнения (4.2.1) полностью удовлетворяющее всем граничным (4.2.2) и начальным условиям (4.2.3), имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \qquad (4.2.9)$$

где a_n, и b_n выражаются по формулам (4.2.7) и (4.2.8).

Стоячие волны, их суперпозиция

Определим физический смысл полученного решения (4.2.9). Для этого выясним какой физический процесс описывает частное решение

$$u_n(x,t)=[a_n\cos(\lambda_n at)+b_n\sin(\,\lambda_n at)]\sin(\lambda_n x).$$

Умножим правую часть этого выражения на величину $\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$. Обозначим числитель $\sqrt{a_n^2+b_n^2}=A_n$, а знаменатель внесём за скобки, почленно поделив слагаемые:

$$u_n(x,t)=A_n\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos(\lambda_n at)+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin(\lambda_n at)\right)\sin(\lambda_n x).$$

Используя основное тригонометрическое тождество, легко доказать, что $\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ и $\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ являются, соответственно, синусом и косинусом некоторого угла φ_n: $\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \sin\varphi_n$, $\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \cos\varphi_n$. Тогда:

$$u_n(x,t) = A_n \sin(\lambda_n x)[\cos(\lambda_n at)\sin\varphi_n + \sin(\lambda_n at)\cos\varphi_n].$$

Свернём выражение, стоящее в квадратных скобках, воспользовавшись формулой синуса суммы углов:

$$u_n(x,t) = A_n \sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n at + \varphi_n).$$

Полученное выражение представляет собой *уравнение стоячей волны*. Это значит, что все точки струны совершают гармонические колебания с одной и той же частотой $\omega_n = \lambda_n a = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}n$ и амплитудой $A_n\sin(\lambda_n x)$. В точках с координатами $x = 0; \frac{l}{n}; \frac{2l}{n}; \frac{3l}{n} \ldots$ амплитуда колебаний $A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = 0$, следовательно, точки остаются неподвижными — это *узлы стоячей волны*. Узлы разбивают струну на n участков, середины которых — *пучности стоячей волны* — колеблются с максимальной амплитудой (рис.10).

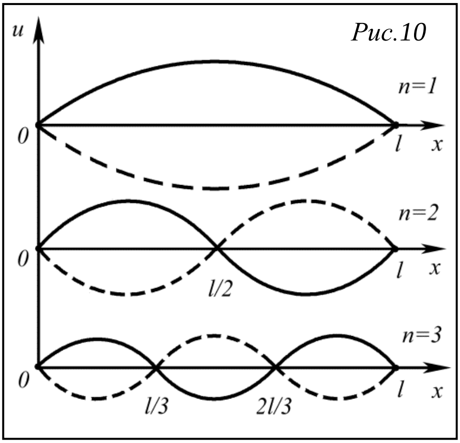


Рис.10

Наименьшая собственная частота $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ называется *частотой основного тона*. Кратные частоты $\omega_n = n\omega_1$ называют *гармониками* или *обертонами*. Для каждой гармоники наибольшая амплитуда колебаний $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ будет определяться её номером n и начальными условиями (4.2.3), так как a_n и b_n, в свою очередь, определяются начальной фор-

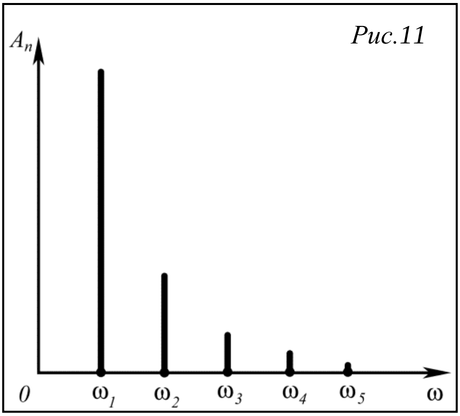


Рис.11

мой струны и начальной скоростью её точек. На рис.11 показан характерный спектр колебаний струны.

Поскольку общее решение $u(x,t)=\sum u_n(x,t)$, то следует понимать, что решение (4.2.9) представляет собой *суперпозицию стоячих волн с кратными частотами*. Решение (4.2.9), записанное в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin(n\omega_1 t+\varphi_n),$$

означает, что струна излучает музыкальную ноту с частотой $\nu=\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$; совокупность амплитуд $A_1, A_2 \ldots$ характеризует *спектр ноты* (тембр звука), определяемый начальными условиями (4.2.3).

4.3. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности

Решим задачу о распространении тепла в тонком длинном теплопроводящем стержне, теплоизолированном от внешней среды. Этот процесс описывается одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (4.3.1)$$

Будем считать стержень настолько длинным, что можно не учитывать температурные условия на его концах. В этом случае стержень можно считать бесконечным, и граничные условия можно не учитывать. Пусть в начальный момент времени распределение температуры в стержне задано функцией

$$u(x,0)=f(x). \qquad (4.3.2)$$

Тогда описание процесса распространения тепла в стержне будет сводиться к решению задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности (4.3.1) при начальных условиях (4.3.2). Будем искать её решение методом Фурье:

$$u(x,t)=X(x)T(t). \qquad (4.3.3)$$

Аналогично тому, как это было сделано в п. 4.2., разделим уравнение (4.3.1) на два уравнения:

$$u'_t=XT';\ u''_{x^2}=X''T;$$

$$XT'=a^2X''T;$$

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$

где λ — параметр разделения. Отсюда:

$$\begin{cases} \dfrac{T'}{T} = -\lambda^2 a^2, \\ X'' + \lambda^2 X = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы решается следующим образом:

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -\lambda^2 a^2;$$

$$\frac{dT}{T} = -\lambda^2 a^2 dt.$$

Взяв интеграл от обеих частей, получим:

$$\ln T = -\lambda^2 a^2 t + C;$$

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Решение второго уравнения системы:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Таким образом:

$$\begin{cases} T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}, \\ X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x), \end{cases}$$

где A, B, C, λ — некоторые произвольные постоянные. Подставив полученные решения в (4.3.3), получим частное решение уравнения (4.3.1.):

$$u(x,t) = [A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)]Ce^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Можно заметить, что для любого значения λ полученное частное решение будет являться решением уравнения (4.3.1). Следовательно, коэффициенты A, B и C могут быть произвольными коэффициентами от λ. Обозначим $A(\lambda) = AC$, $B(\lambda) = BC$. Тогда, семейство частных решений уравнения теплопроводности (4.3.1.) имеет вид:

$$u_\lambda(x,t) = [A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)]e^{-\lambda^2 a^2 t}. \qquad (4.3.4)$$

Поскольку $-\infty < \lambda < +\infty$, а уравнение (4.3.1) линейное и однородное, то суперпозиция частных решений (4.3.4):

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_\lambda(x,t)\,d\lambda;$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)]e^{-\lambda^2 a^2 t}\,d\lambda. \qquad (4.3.5)$$

Функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ должны быть такими, чтобы выполнялось начальное условие (4.3.2). При $t = 0$ множитель $e^{-\lambda^2 a^2 t}$ становится равным единице, а функция $u(x, t)$ обращается в $f(x)$. Тогда:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)]\, d\lambda \equiv f(x). \qquad (4.3.6)$$

Из математического анализа известно, что обобщением ряда Фурье для всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$ является *интегральная формула Фурье*:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)]\, d\lambda, \qquad (4.3.7)$$

где коэффициенты $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ находятся по формулам

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos(\lambda s)\, ds;$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin(\lambda s)\, ds.$$

Подставим коэффициенты $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в интегральную формулу Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(\lambda x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos(\lambda s) ds \; + \right.$$

$$\left. + \; \sin(\lambda x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin(\lambda s)\, ds\right] d\lambda.$$

Внесём $\cos(\lambda x)$ и $\sin(\lambda x)$ под знак интеграла, и, воспользовавшись формулой косинуса разности углов, свернём полученное выражение:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos\lambda(s - x) ds. \qquad (4.3.8)$$

Из сравнения (4.3.5) и (4.3.7), и с учётом (4.3.8), следует, что решением (4.3.1), удовлетворяющим начальным условиям, будет функция:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\, d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos\lambda(s - x) ds.$$

Упростим полученное решение. Учитывая чётность функции косинуса, запишем:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(s-x)d\lambda.$$

Из математического анализа известно, что:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(s-x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}}.$$

С учётом последней формулы, общее решение уравнения теплопроводности (4.3.1), удовлетворяющее начальному условию (4.3.2), имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}}ds. \qquad (4.3.9)$$

Полученное решение (4.3.9) называется *формулой Пуассона.*

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и его физический смысл

Для определения физического смысла полученного решения (4.3.9) рассмотрим *фундаментальное решение уравнения теплопроводности.*

Фундаментальным решением уравнения теплопроводности называют функцию

$$u_s(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}}, \qquad (4.3.10)$$

являющуюся частным решением уравнения теплопроводности (4.3.1). Фундаментальное решение является решением задачи теплопроводности в бесконечном стержне при начальном распределении температуры в виде *теплового импульса*.

Понятие теплового импульса имеет следующую интерпретацию. Если в начальный момент времени мгновенно сообщить стержню количество теплоты Q_0 в точке $x = 0,$ то температура в точке $x = 0$ поднимется до T_0, а в остальных точках температура останется прежней. В этом случае решение уравнения (4.3.9) можно представить в виде:

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

Графики распределения температуры для различных моментов времени ($t > 0$) представлены на рис.12.

Таким образом, физический смысл решения (4.3.9) можно представить как суперпозицию температур, возникающих в точке стержня с координатой x в момент времени t вследствие непрерывно распределённых по стержню тепловых импульсов $f(s)$, приложенных к точкам стержня $x = s$ в момент времени $t = 0$.

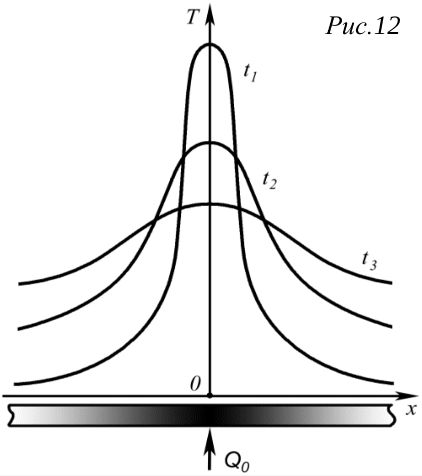


Рис.12

4.4. Уравнение Лапласа. Гармонические функции. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах методом Фурье. Полиномы Лежандра. Понятие о сферических и шаровых функциях

Решение большого числа краевых задач математической физики приводит к решению уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0. \qquad (4.4.1)$$

Ему удовлетворяют, например, потенциал электростатического поля в той области пространства, где отсутствуют заряды. К уравнению Лапласа приводится уравнение теплопроводности для стационарного распространения температуры. При определённом граничном условии, задающем функцию на некоторой замкнутой поверхности, уравнение Лапласа имеет однозначное решение.

Функции, удовлетворяющие решению уравнению Лапласа, называются **гармоническими функциями**.

В зависимости от формы поверхности, на которой задано граничное условие, для решения уравнения Лапласа используют различные системы координат. Рассмотрим решение уравнения Лапласа в сферической системе координат. Для этого вначале определим вид уравнения Лапласа в сферических координатах.

В криволинейной системе координатах оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_2 H_1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right],$$

где q_1, q_2, q_3 — *криволинейные координаты*, H_1, H_2, H_3 — *коэффициенты Ламе*. В сферических координатах положение точки в пространстве задаётся величинами r, θ, φ. Соответственно, $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, а коэффициенты Ламе $H_1 = H_r = 1$; $H_2 = H_\theta = r$; $H_3 = H_\varphi = r\sin\theta$. Подставляя соответствующие координаты и значения коэффициентов Ламе в формулу для нахождения лапласиана в криволинейных координатах, получим уравнение Лапласа сферических координатах в следующем виде:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{1}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad (4.4.2)$$

Будем искать его решение методом Фурье. Представим искомую функцию в виде произведения двух функций:

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi). \qquad (4.4.3)$$

Подставим (4.4.3) в уравнение (4.4.2):

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)Y + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)R + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}R = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R} = -\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y} = \lambda, \qquad (4.4.4)$$

где λ – некоторая постоянная (параметр разделения).

Из полученного выражения следует, что

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0, \qquad (4.4.5)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \qquad (4.4.6)$$

Решение (4.4.6) также будем искать методом разделения переменных:

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \tag{4.4.7}$$

Подставляя (4.4.7) в уравнение (4.4.6), получим:

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\Phi+\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\,\Theta+\lambda\Theta\Phi=0;$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\Phi+\lambda\Theta\Phi=-\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\Theta.$$

Разделим переменные, умножив обе части равенства на $\frac{\sin^2\theta}{\Theta\Phi}$:

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\Theta\right]=-\frac{1}{\Phi}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=\mu \tag{4.4.8}$$

где μ — параметр разделения.

Из (4.4.8) получаем уравнения:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\mu\Phi=0; \tag{4.4.9}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\Theta\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)=0. \tag{4.4.10}$$

Найдём решение (4.4.9). Полагая, что $\mu=m^2$, получим решение (4.4.9) в показательной форме:

$$\Phi(\varphi)=Ae^{im\varphi}+Be^{-im\varphi}, \tag{4.4.11}$$

где A и B — некоторые постоянные.

Из свойств сферических координат следует, что функция $\Phi(\varphi)$ должна удовлетворять условию цикличности: $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$. Следовательно, m должно являться целочисленным: $m=0,\pm1,\pm2$ ...

Для нахождения решения уравнения (4.4.10) введём обозначения: $x=\cos\theta$, $\Theta(\theta)=y(x)$. С учётом замены уравнение (4.4.10) примет вид:

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0. \tag{4.4.12}$$

Уравнение (4.4.12) называется *уравнением Лежандра*. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что решение уравнения Лежандра, ограниченное на интервале [–1,1] существуют только при $\lambda=l(l+1)$, где l — целое. Следовательно:

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0. \tag{4.4.13}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\Theta(\theta) = P_l^{(m)}(\cos\theta), \tag{4.4.14}$$

где $P_l^{(m)}$ — присоединённые полиномы Лежандра. Присоединённые полиномы Лежандра находятся по *формулам Родрига*:

$$P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x); \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \pm l, \tag{4.4.15}$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - l)^l. \tag{4.4.16}$$

где $P_l(x)$ — полиномы Лежандра.

Найдём решение уравнения (4.4.5): $\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0$. Раскрывая скобку, получим

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0; \quad \lambda = l(l+1).$$

Будем искать решение в виде $R = r^s$. Тогда $R' = sr^{s-1}$, $R'' = s(s-1)r^{s-2}$. Подставляя производные в уравнение, получим:

$$s(s-1)r^{s-2}r^2 + 2r\,sr^{s-1} - \lambda r^s = 0.$$

После упрощения получим выражение:

$$s(s+1) = \lambda.$$

Так как $\lambda = l(l+1)$, то $s(s+1) = l(l+1)$. Следовательно, $s = l$.

Таким образом, решение уравнение (4.4.5) можно представить в виде:

$$R(r) = Cr^l, \tag{4.4.17}$$

где C — некоторая постоянная.

С учётом полученных решений (4.4.11) и (4.4.14), можно сделать вывод, что решению уравнения (4.4.7) удовлетворяют функции:

$$Y_l^{(m)}(\theta,\varphi) = P_l^{(m)}(\cos\theta)\, Ae^{im\varphi}. \tag{4.4.18}$$

Функции вида (4.4.18) называются *сферическими функциями*.

Частными решениями уравнения Лапласа, согласно формуле (4.4.3), являются функции вида:

$$u_l^{(m)}(r,\theta,\varphi) = R(r)\, Y_l^{(m)}(\theta,\varphi). \tag{4.4.19}$$

Функции вида (4.4.19) называются *шаровыми функциями*.

Таким образом, общее решение уравнения Лапласа в сферических координатах имеет вид:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} C_{l,m}\, r^l\, P_l^{(m)}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}. \qquad (4.4.20)$$

Задача Дирихле

Задача Дирихле для шара может быть сформулирована следующим образом: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ внутри шара, и краевому условию на границе шара $u|_S = f$.

Решение этой задачи сводится к разложению функции f, задающей граничное условие, в ряд по полиномам Лежандра (в ряд Фурье–Лежандра):

$$f(x)=\sum_{l=m}^{\infty} a_l P_l^{(m)}(x),$$

коэффициенты которого вычисляют по формуле

$$a_l=\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)\, P_l^{(m)}(x)dx.$$

4.5. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Понятие о функциях Бесселя

При рассмотрении физических процессов в областях с круговой и сферической симметрией удобно уравнение Лапласа записывать в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (4.5.1)$$

Его решение сводится к функциям Бесселя:

$$J_p(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \qquad (4.5.2)$$

которые являются решением уравнения Бесселя:

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0. \qquad (4.5.3)$$

Таким образом, аналогично п. 4.4., решение краевых задач в цилиндрических координатах сводится к разложению функции, задающей граничные условия, в ряд по функциям Бесселя (в ряд Фурье–Бесселя):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{c}_k J_p(x).$$

4.6. Понятие о методе функции Грина

Метод функции Грина широко используется в теоретической физике, особенно в квантовой теории поля и статистической физике. Функция Грина описывает распространение полей от источников их порождающих.

Представление о методе функции Грина можно получить из анализа решения задачи об охлаждении бесконечного стержня. Как уже это было показано раньше, эта задача сводится к решению уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, при начальном условии $u(x,0) = f(x)$.

В методе функции Грина предполагают, что решение этой задачи можно представить в виде:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t,s)\, f(s) ds, \tag{4.6.1}$$

где s — переменная интегрирования, $G(x,t,s)$ — функция Грина, конкретный вид которой необходимо определить.

Физический смысл функции Грина состоит в том, что она является решением рассматриваемой задачи для «точечного» начального условия. В рассматриваемой задаче она показывает как влияет точечный тепловой импульс на распределение температуры в стержне в различные моменты времени. Построение функции Грина должно быть таким, чтобы решение (4.6.1) удовлетворяло начальным условиям. В частности, применение метода функции Грина к решению задачи Коши об охлаждении бесконечного стержня приводит к решению вида (4.3.9), из которого хорошо видно значение соответствующей функции Грина.

4.7. Специальные функции

К специальным функциям относятся рассмотренные ранее сферические функции, шаровые функции, полиномы Лежандра, функции Бесселя. Кроме этого, важное значение при решении задач математической физики играют такие специальные функции как *полиномы Эрмита* и *функции Лагерра.*

Полиномы Эрмита определяются формулой:

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \cdot \frac{d^k}{dx^n}\, e^{x^2},$$

а функции Лагерра находятся из формулы:

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n}\, (x^n e^{-x}).$$

Эти функции используется при решении задач о движении электрона в кулоновом поле, о распределении электромагнитных волн вдоль длинных линий и т.д.

Специальные функции обладают свойством *ортогональности.*

Ортогональными на интервале $[a, b]$ называются функции, для которых справедливо равенство:

$$\int_a^b \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, \rho(x) dx = 0,$$

где $\rho(x)$ — вес, $m \neq n$.

Ортогональность специальных функций позволяет при решении широкого класса задач математической физики прибегать к разложению в ряды по этим функциям.

4.8. Вопросы для самопроверки

1. В каком виде ищется решение задачи Коши о колебаниях струны методом Даламбера?
2. В каком виде ищется решение дифференциального уравнения методом Фурье?
3. В каком из методов решение ищется в виде суперпозиции бегущих волн?
4. В чём заключается физический смысл решения задачи о колебаниях закреплённой струны методом Фурье?
5. Как образуются стоячие волны?
6. На какие характеристики колебаний струны влияют начальные условия?
7. От каких величин зависит частота основной гармоники колебаний закреплённой струны?
8. Можно ли применять метод Фурье для решения задачи Коши о распространении тепла в бесконечном стержне?

9. Какое решение уравнения теплопроводности называют фундаментальным? В чём заключается его физический смысл?
10. В чём заключается физический смысл решения задачи Коши об охлаждении бесконечного стержня?
11. Какие функции называют гармоническими?
12. Что является обобщением ряда Фурье для всей числовой прямой?
13. К разложению в какой ряд сводится решение уравнения Лапласа в области со сферической симметрией?
14. Сформулируйте задачу Дирихле для шара.
15. К разложению в какой ряд сводится решение уравнения Лапласа в области с цилиндрической симметрией?
16. В чём заключается идея метода функции Грина?
17. Перечислите примеры специальных функций.
18. Какие функции называют ортогональными?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баврин, И.И.* Высшая математика: Учеб. для студ. пед. вузов по направлению «Естественнонаучное образование / И.И. Баврин. – М.: Академия, 2002. – 616 с.
2. *Белевец, П.С.* Задачник–практикум по методам математической физики: Учеб. пособие / П.С. Белевец, И.Г. Кожух. – Мн.: Выш. шк., 1988. – 108 с.
3. *Болсун, А.И.*, Методы математической физики: Учеб. пособие / А.И. Болсун, В.К. Гронский, А. А. Бейда. – Мн.: Выш. шк., 1988. – 199 с.
4. *Бугров, Я.С.* Высшая математика: учеб. для вузов. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский; под ред. В.А. Садовничего. – М.: Дрофа, 2003. – 512 с.
5. *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики: учеб. для вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2003. – 400 с.
6. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев, О.В. Зимина, А.И. Кириллов и др.; под ред. А.И. Кириллова. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.
7. *Голоскоков, Д.П.* Уравнения математической физики: решение задач в системе Maple: учебник для вузов / Д. П. Голоскоков. – СПб.: Питер, 2004. – 544 с.
8. *Мантуров, О.В.* Курс высшей математики: Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной. Численные методы. Теория вероятностей: Учеб. для студентов вузов / О.В. Мантуров. – М.: Высшая школа, 1991. – 448 с.
9. *Матвеев, Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / Н.М. Матвеев. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.
10. *Михлин, С.Г.* Курс математической физики: учебник для студентов ун-тов / С.Г. Михлин. – СПб.: Лань, 2002. – 576 с.
11. *Несис, Е.И.* Методы математической физики: учеб. пособ. для студентов физико-математических факультетов пед. ин-тов / Е.И. Несис. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
12. *Олейник, О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными: учеб. для студ. вузов / О.А. Олейник. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2005. – 260 с.

13. *Очан, Ю.С.* Сборник задач по методам математической физики: учеб. пособие для студентов втузов / Ю.С. Очан. – М.: Высшая школа, 1973. – 192 с.

14. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для ст-ов втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 544 с.

15. *Полянин, А.Д.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики: учеб. пособие для студ. / А.Д. Полянин, В.П. Зайцев, А.И. Журов. – М: Физматлит, 2005. – 256 с.

16. *Полянин, А.Д.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: Физматлит, 2002. – 576 с.

17. Сборник задач по уравнениям математической физики: для студентов физико-математических специальностей вузов / под. ред. В.С. Владимирова. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

18. *Свешников, А.Г.* Лекции по математической физике: учеб. пособие для вузов / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М.: Изд-во МГУ – Наука, 2004. – 414 с.

19. *Свешников, А.Г.* Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов вузов / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М.: Изд-во МГУ – Наука, 2004. – 416 с.

20. *Шарма, Дж.Н.* Уравнения в частных производных: учебник / Дж.Н. Шарма, К. Сингх; Под. ред. А.Г. Кюркчана. – М: Техносфера, 2002. – 320 с.

21. *Шипачев, В.С.* Высшая математика: Учеб. для студ. вузов / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.

22. *Шипачев, В.С.* Основы высшей математики: учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев., под. ред. А. Н. Тихонова. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

23. *Шубин, М.А.* Лекции об уравнениях математической физики: для студентов, аспирантов, научных работников – математиков и физиков / М.А. Шубин. – М: МЦНМО, 2003. – 303 с.

24. *Шубин, М.А.* Математический анализ для решения физических задач / М.А. Шубин. – М.: Изд-во Моск. центра непрерыв. математ. образования, 2003. – 40 с.

У ч е б н о е   и з д а н и е

Иванов Юрий Владимирович

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Отпечатано в ООО «Глазовская типография»,
ул. Энгельса, 37.
Подписано в печать 30.11.2012 г.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Формат $60x84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 1,8.
Заказ ______. Тираж ______.